Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015

UE de Géométrie

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1 (Exemples d'espaces affines)**.** ($\star$)

1. Soient deux espaces vectoriels V et W, $l : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $\vec{b} \in W$. Montrer que l'ensemble des solutions linéaires de l'équation
$$l(\vec{x}) \ = \ \vec{b} \ ,$$
s'il n'est pas vide, est un espace affine. Déterminer sa direction.

2. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. L'ensemble des applications ϕ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui sont solutions de l'équation
$$a_n \frac{d^n}{dx^n}\phi \ + \ a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\phi \ + \ \dots a_0\phi \ = \ \psi$$
est-il un espace affine ? Dans l'affirmative, quelle est sa dimension ?

3. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ et $b \in \mathbb{R}$. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels vérifiant
$$u_{n+k} \ + \ a_{k-1}u_{n+k-1} \ + \ \cdots \ + \ a_1u_{n+1} \ + \ a_0u_n \ = \ b$$
est-il un espace affine ?

4. L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est-il un espace affine ?

5. L'ensemble des matrices dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$de la forme
$$\begin{pmatrix} 1+a-b & a-b & 0 \\ 0 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
pour $a, b \in \mathbb{R}$ est-il un espace affine ? Déterminer sa dimension.

Exercice 2 (Sans coordonnées)**.** ($\star$) Soit (X, V) un espace affine.

1. Pour trois points $O, P, Q \in X$ et $\vec{v} \in V$, montrer que $P + \vec{v} = Q$ si et seulement si $\overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.

2. On dira que des points sont *collinéaires* s'ils sont sur une même droite affine. Alors, un *parallélogramme* est une suite (P, Q, R, S) de quatre points dont aucune partie de trois points ne sont collinéaires, telle que la droite déterminée par $\overrightarrow{PQ}$ soit parallèle à celle déterminée par $\overrightarrow{RS}$, et que la droite déterminée par $\overrightarrow{PS}$ soit parallèle à celle déterminée par $\overrightarrow{QR}$.
Montrer que si (P, Q, R, S) est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$.

Exercice 3. ($\star$) Soit (X, V) un espace affine. On note $\mathbb{K}$ le corps de base de V. Soit Y une partie non vide de X.

1. On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas 2. Montrer que Y est un sous-espace affine de X si et seulement si : pour tout $(A, B) \in Y^2$, avec $A \neq B$, la droite (AB) est incluse dans Y.

2. Cette équivalence est-elle vraie en caractéristique 2.

Exercice 4 (Un peu de théorie)**.** ($\star$)

1. Soient (X,V) un espace affine, $P_1,\dots,P_r \in X$ et $a_1,\dots,a_r \in K$ où K est le corps sur lequel est défini l'espace vectoriel V. Si $\sum_{i=1}^r a_i = 1$, alors montrer que pour tous $O, O' \in X$,
$$O \;+\; \sum_{i=1}^{r} \; a_i \; \overrightarrow{OP_i} = \; O' \;+\; \sum_{i=1}^{r} \; a_i \; \overrightarrow{O'P_i} \quad .$$
En d'autres termes, le point $O + \sum_{i=1}^r a_i \, \overrightarrow{OP_i}$ ne dépend pas du choix de O.
2. Soient $(O;B)$ et $(O';B')$ deux repères pour un espace affine (X,V), et $m \in X$. Exprimer les coordonnées $(x'_1,\dots,x'_d)$ de m dans $(O';B')$ en fonction des coordonnées $(x_1,\dots,x_d)$ de m dans $(O;B)$.
3. Montrer que deux hyperplans affines distincts d'un espace affine X sont soit parallèles, soit s'intersectent en un sous-espace affine de dimension $\dim(X)-2$.

Exercice 5 (Positions et intersections)**.** On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. La direction d'une droite affine D est notée $\vec{D}$. Soit $k \geq 3$ un entier. On dit qu'une famille $(\Delta_i)_{1\leq i\leq k}$ de droites affines est en *position générale* si

1. pour $i \neq j$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$
2. pour tout triplet i, j, k d'entiers distincts, $\mathbb{R}^3 = \vec{\Delta_i} \oplus \vec{\Delta_j} \oplus \vec{\Delta_k}$ (la somme directe).

On dit qu'une droite affine Δ est une *sécante* de la famille $(\Delta_i)_{1\leq i\leq k}$ si $\Delta \cap \Delta_i$ est un singleton pour tout $1 \leq i \leq k$.
Sur le cube unité, on considère
– D_1 la droite affine passant par $(0,0,1)$ dirigée par $\vec{e_1}$,
– D_2 la droite affine passant par $(1,0,0)$ dirigée par $\vec{e_2}$,
– D_3 la droite affine passant par $(0,1,0)$ dirigée par $\vec{e_3}$,
– D_4 la droite affine passant par $(1,1,1)$ dirigée par $\vec{e} = (1,-1,1)$.

1. (a) Donner, dans le repère canonique$((0,0,0);B)$ un système d'équations cartésiennes pour chaque droite D_i, $1 \leq i \leq 4$.
   (b) La famille $(D_i)_{1\leq i\leq 4}$ est-elle en position générale ?
2. Montrer, en les déterminant, que la famille $(D_i)_{1\leq i\leq 4}$ admet exactement deux sécantes.
3. Donner explicitement une droite affine D_5 telle que $(D_i)_{1\leq i\leq 5}$ soit en position générale et n'admette pas de sécante.

Exercice 6 (Parallélogramme)**.** ($\star$) Montrer que : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Et réciproquement (si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, celui-ci est un parallélogramme).

Exercice 7 (Corps finis)**.** ($\star$)

1. On considère un plan affine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Combien a-t-il de points et de droites ? Trouver une représentation dans le plan réel.
2. On considère un plan affine sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Combien a-t-il de points et de droites ? Combien chaque droite a-t-elle de points ? Montrer que par chaque point, il passe quatre droites et que pour une direction donnée, il y a trois droites parallèles a cette direction.
3. Trouver le nombre de points et de droites dans un plan affine sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier quelconque.

Exercice 8 (Réunion finie d'espaces affines)**.** ($\star$) Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$. À quelle condition $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est-il un sous-espace affine ?

Exercice 9. Dans un espace affine de dimension supérieure ou égale à 3, on considère n droites ($n \geq 2$). On suppose que deux droites de cette famille ont toujours un points commun.
Montrer que, soit toutes ces droites ont un point commun, soit elles sont coplanaires.

Exercice 10 (Homothétie)**.** ($\star$) Soit f une application linéaire de E dans lui-même. On suppose que l'image par f de tout vecteur est un vecteur qui lui est colinéaire.

1. Écrire cette hypothèse avec des symboles mathématiques et des quantificateurs.
2. Écrire en termes analogues la définition d'une homothétie (vectorielle).
3. Comparer les deux écritures et démontrer que f est, quand même, une homothétie.

Exercice 11 (Homothétie 2)**.** ($\star$) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension au moins égale à 2 et φ une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que l'image de toute droite soit une droite qui lui est parallèle.
Montrer que φ est une translation ou une homothétie.

Exercice 12. Dans un espace affine de dimension 3, on considère un tétraèdre (quelconque) $\mathcal{T}$ de sommets A, B, C et D.
Démontrer que l'ensemble des applications affines qui préservent $\mathcal{T}$ est un groupe isomorphe au groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.
Combien y a-t-il d'applications affines conservant $\mathcal{T}$?

Exercice 13. Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit φ une application affine telle que $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(C) = A$.

1. Est-elle complètement déterminée ? Est-elle injective ?
2. Donner une description simple de φ^3.
3. Montrer que φ a un point fixe.
4. Quelle est la matrice de φ dans le repère d'origine A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

Exercice 14. On se place dans un plan muni d'un repère affine.

1. Déterminer l'expression d'une application affine qui transforme le parallélogramme délimité par les droites $y = 2x + 1$, $y = 2x + 3$, $x = 3y$ et $x = 3y + 4$ en le "carré" de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
2. Peut-on transformer n'importe quel quadrilatère en un "carré" par une application affine ?